# Transportgleichungen für dimensionsreduzierte Modelle

Jens Wyrwa

29. April 2016

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Problemstellung

In der Bfg werden wir wohl aus Gründen beschränkter Rechnerkapazität wohl noch eine ganze Weile darauf angewiesen sein, Stofftransportvorgänge in Gewässern mit dimensionsreduzierten (hauptsächlich querschnitts- und tiefengemittelt) Modellen zu untersuchen. Im folgenden wird gezeigt, wie sich die Gleichungen für gemittelte Konzentrationen aus der allgemeinen 3-dimensionalen Advektions-Diffusions Gleichung (Transportgleichung) herleiten.

## 1.2 Allgemeine 3D Formulierung der Transportgleichung

Die Transportgleichung als Differentialgleichung im allgemeinen 3-dimensionalen Fall kann in mehreren Formen angeschrieben werden. Die folgenden Formulierungen gelten immer nur für einen konservativen Tracer. Sie beschreibt immer eine Massenbilanz. Die folgenden Formulierungen gelten nur für einen konservativen Tracer. Im Folgenden wird eine eulerische Betrachtungsweise verwendet, das heißt es werden immer Größen an festen Punkten im Raum betrachtet.

### 1.2.1 Vektorschreibweise

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div\left[\overrightarrow{v} \cdot c - D \cdot grad(c)\right] = 0 \tag{1.1}$$

### 1.2.2 Indexschreibweise

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (v_i \cdot c - D \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i})}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2}$$

### 1.2.3 Komponentenschreibweise

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (u \cdot c - D \cdot \frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (v \cdot c - D \cdot \frac{\partial c}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (w \cdot c - D \cdot \frac{\partial c}{\partial z})}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

Die Formelzeichen bedeuten dabei folgendes:

$c$ - Konzentration

$t$ - Zeit

$\vec{v}$ - Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten $v_{1..3}$oder u,v,w

$\vec{x}$ - Ortsvektor mit den Komponenten $x_{1...3}$oder x,y,z

dabei sei angenommen, dass z die vertikale Koordinate, y die horizontale Breitenkoordinate transversal zur Fließrichtung/Flussachse und x die Koordinate in Längsrichtung ist.

D - ist die molekulare Diffusivität

## 1.3 Produktregel der Differentialrechnung

mit der Produktregel der Differentialrechnung für zwei Funktionen a(x) und b(x)

$$\frac{\partial(a \cdot b)}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial a}{\partial x} \tag{1.4}$$

läßt sich die Gleichung 1.3 folgendermaßen umformen:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} + c \cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{\partial(D \cdot \frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(D \cdot \frac{\partial c}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(D \cdot \frac{\partial c}{\partial z})}{\partial z} = 0 \tag{1.5}$$

## 1.4 Massenerhaltung beim inkompressiblen Fluid

Die Massenbilanz für ein inkompressibles Fluides ergibt die sogenannte Kontinuitäts-Gleichung (siehe z.B. [4] ), die aussagt, das das Wasser, das unsere transportierte Konzentration trägt, sein Volumen nicht ändert. Diese Gleichung sei im folgenen ebenfalls in Vektor- und Komponentenschreibweise notiert:

$$div(\overrightarrow{v}) = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.6}$$

## 1.5 Transport-Gleichung mit Vernachlässigung der Diffusion

Wird nun in Gleichung 1.5 die Kontigleichung 1.6 eingesetzt und weiterhin auch noch die Diffusion vernachlässigt ($D = 0$), dann ergibt sich die Transportgleichung als Advektionsgleichung in primitiven Variablen:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \tag{1.7}$$

Dieselbe Vernachlässigung der Diffusion überführt dann die Gleichung 1.3 in die Advektionsgleichung in konservativer Formulierung:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(u \cdot c)}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot c)}{\partial y} + \frac{\partial(w \cdot c)}{\partial z} = 0 \tag{1.8}$$

Mit letzterer wird im folgenden weitergearbeitet. Die Vernachlässigung der molekularen Diffusion ist dabei die einzige Vereinfachung, die in der Gleichung bisher eingeführt wurde.

## 1.6 Differenzieren von Parameterintegralen (Leibniz-Regel)

Für Parameterintegrale mit veränderlichen Integrationsgrenzen läßt sich [1] der an anderer Stelle auch als Leibnitz-Regel bekannte Zusammenhang entnehmen. Die Funktion f ist von zwei Variablen x und t abhängig. Es wird nach t differenziert und über x integriert, wobei die Integralgrenzen a und b von t abhängen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x \;+\; f\big(b(t),t\big) \cdot \frac{\partial b}{\partial t} \;-\; f\big(a(t),t\big) \cdot \frac{\partial a}{\partial t}$$

Durch Umstellung der Terme erhalten wir daraus eine Vorschrift, wie das Integral einer Ableitung in die Ableitung einer Integration überführt werden kann:

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right) - \; f\big(b(t),t\big) \cdot \frac{\partial b}{\partial t} \;+\; f\big(a(t),t\big) \cdot \frac{\partial a}{\partial t}$$

## 1.7 Kinematische Randbedingung

Die Gewässer-Sohle, die an der Stelle $z = b(x, y)$ liegen mag, und die Wasseroberfläche, welche sich an der Stelle $z = s(x, y, t)$ befinden mag, werden vom Wasser nicht durchflossen. Als kinematische Randbedingung wird dann der Zusammenhang beschreiben, dass der Geschwindigkeitsvektor in der jeweiligen Ebene liegen muss. An der Sohle, b, meint dies, dass die Vertikalkompnente der Geschwindigkeit, w, gleich der Sohlneigung mal der zugehörigen horizontalen Geschwindigkeitskomponente ist.

$$w|_b = u|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + v|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial y}$$

An der Wasseroberfläche, s, kommt dann noch die vertikale Bewegung der Wasserspiegeloberfläche hinzu:

$$w|_s = \frac{\partial s}{\partial t} + u|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + v|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

Für die seitlichen Berandungen gilt analoges.

# Kapitel 2

# Tiefen-Mittelung

## 2.1 Integration

Die tiefengemittelte Form der Transportgleichung läßt sich ableiten, indem die gesamte Gleichung 1.8 über die Wassertiefe, also von der Sohle $z = b(x,y)$ bis zur Wasseroberläche $z = s(x,y,t)$, integriert wird:

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(u \cdot c)}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot c)}{\partial y} + \frac{\partial(w \cdot c)}{\partial z} \right\} dz = 0 \tag{2.1}$$

Unter Anwendung der Leibnitz-Regel lasen sich dann die Terme der obigen Gleichung umformen. Der erste Term ergibt:

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial c}{\partial t} \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} c\mathrm{dz}\right) - c|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial t}$$

Aus dem zweiten Term wird: (der dritte Term folgt analog)

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(u \cdot c)}{\partial x} \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (u \cdot c)\mathrm{dz}\right) - (u \cdot c)|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + (u \cdot c)|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial x}$$

Beim vierten Term wird über dieselbe Variable integriert wie differenziert, so dass sich die Integration ausführen läßt:

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(w \cdot c)}{\partial z} dz = (w \cdot c)|_s - (w \cdot c)|_b$$

Es wird nun noch das Dach als Kurzform für die Tiefen-Integration $\widehat{c} = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} c\mathrm{dz}$ eingeführt, so dass sich das obige folgendermaßen aufschreiben läßt:

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial c}{\partial t} \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} - c|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(u \cdot c)}{\partial x} \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{u} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{d}x} - (u \cdot c)|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + (u \cdot c)|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(v \cdot c)}{\partial y} \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}(\widehat{v \cdot c})}{\mathrm{d}y} - (v \cdot c)|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + (v \cdot c)|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial y}$$

in den vierten Term wird zudem noch die kinematische Randbedingung eingesetzt.

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(w \cdot c)}{\partial z}\,\mathrm{d}z = c|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + (u \cdot c)|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + (v \cdot c)|_s \cdot \frac{\partial s}{\partial y} - (u \cdot c)|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial x} - (v \cdot c)|_b \cdot \frac{\partial b}{\partial y}$$

Beim Summieren der vier Terme hebt sich dann alles, was kein Integral enthält, gegeneinander weg und es entsteht:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{u} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{v} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{2.2}$$

## 2.2 Trennung in Mittelwert und Schwankungsgröße

Durch Definition eines tiefengemittelten Konzentrationswertes $\bar{c}$ in der folgenden Form:

$$\bar{c}(x,y,t) = \frac{\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} c(x,y,z,t)\mathrm{d}z}{h(x,y,t)}$$

$$\widehat{\mathrm{c}} = \bar{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{h}$$

Dabei ist $h(x,y,t) = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \mathrm{d}z = s(x,y,t) - b(x,y)$ die Wassertiefe.
Damit läßt sich dann vom allgemeinen, instationären, dreidimensionalen Konzentrationsfeld, $c$ ein Schwankungsteil $\tilde{c}$ abtrennen:

$$c(x,y,z,t) = \bar{c}(x,y,t) + \tilde{c}(x,y,z,t)$$

Die Tiefenintegration des Schwankungsteils verschwindet definitionsgemäß:

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \tilde{c}\mathrm{d}z = 0$$

Die Geschwindigkeiten werden nun in gleicher Art in tiefengemittelte Größe und Schwankungsteil aufgespalten. Das gemischte Integral aus dem zweiten Term von Gleichung 2.2 ergibt dann Folgendes:

$$\widehat{u \cdot c} = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (u \cdot c)\mathrm{d}z = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \{(\bar{u} + \tilde{u}) \cdot (\bar{c} + \tilde{c})\}\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\bar{u} \cdot \bar{c})\mathrm{d}z + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\bar{u} \cdot \tilde{c})\mathrm{d}z + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{\mathrm{u}} \cdot \bar{\mathrm{c}})\mathrm{d}z + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{u} \cdot \tilde{c})\mathrm{d}z$$

Da die Integrale über die Schwankungsgrößen verschwinden, ergibt sich:

$$= h \cdot \bar{u} \cdot \bar{c} + \bar{u} \cdot \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \tilde{c}\mathrm{d}z + \bar{c} \cdot \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \tilde{u}\mathrm{d}z + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{u} \cdot \tilde{c})\mathrm{d}z = h \cdot \bar{u} \cdot \bar{c} + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{u})\mathrm{d}z$$

Der oben abgeleitete Zusammenhang wird nun in Gl. 2.2 eingesetzt. Damit gelangt man zur **tiefengemittelten Stofftransportgleichung in konservativen Variablen**:

$$\frac{d}{dt}(h \cdot \bar{c}) + \frac{d}{dx}\left\{h \cdot \bar{u} \cdot \bar{c} + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{u})\mathrm{d}z\right\} + \frac{d}{dy}\left\{h \cdot \bar{v} \cdot \bar{c} + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{v})\mathrm{d}z\right\} = 0 \tag{2.3}$$

## 2.3 Abspaltung Volumenerhaltung (Kontigleichung)

mit der Produktregel der Differentialrechnung ergibt sich dann aus Gl. 2.3:

$$\bar{c} \cdot \left[ \frac{dh}{dt} + \frac{d(h \cdot \bar{u})}{dx} + \frac{d(h \cdot \bar{v})}{dy} \right] + \left[ h \cdot \frac{d\bar{c}}{dt} + h \cdot \bar{u} \cdot \frac{d\bar{c}}{dx} + h \cdot \bar{v} \cdot \frac{d\bar{c}}{dy} \right]$$

$$+ \frac{d}{dx} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{u}) \mathrm{dz} \right) + \frac{d}{dy} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{v}) \mathrm{dz} \right) = 0$$

mit der tiefengemittelten Kontigleichung:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(h \cdot \bar{u})}{dx} + \frac{d(h \cdot \bar{v})}{dy} = 0$$

ergibt sich die **tiefengemittelte Tranportgleichung in primitiven Variablen**:

$$\frac{d\bar{c}}{dt} + \bar{u} \cdot \frac{d\bar{c}}{dx} + \bar{v} \cdot \frac{d\bar{c}}{dy} + \frac{1}{h} \left\{ \frac{d}{dx} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{u}) \mathrm{dz} \right) + \frac{d}{dy} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{v}) \mathrm{dz} \right) \right\} = 0 \qquad (2.4)$$

Diese hat eine Voraussetzungen, nämlich, dass das zugrundeliegende Strömungsfeld (im tiefengemittelten inclusive Wasserspiegellage) volumenerhaltend ist.

(Die Division durch die Wassertiefe führt ausserdem dazu, das die Gleichung auf der Uferlinie nicht definiert ist)

# Kapitel 3

# Breiten-Mittelung

Nun soll die allgemeine 3-dimensionale Transportgleichung Gl. 1.8 breitengemittelt werden, d. h. die Integration erfolgt nun über die transversale horizontale Koordinate y vom rechten Ufer $y = r(x,z)$ zum linken Ufer $y = l(x,z)$ erfolgt:

$$\int_{l(x,z)}^{r(x,z)} \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (u \cdot c)}{\partial x} + \frac{\partial (v \cdot c)}{\partial y} + \frac{\partial (w \cdot c)}{\partial z} \right\} dy = 0$$

mit der Leibnitzregel und dem Dach nun als Integralsymbol für die Breitenmittelung $\widehat{c} = \int_{l(x,z)}^{r(x,z)} c \cdot dy$ ergeben die einzelnen Terme:

$$\int_{l(x,z)}^{r(x,z)} \frac{\partial c}{\partial t} dy = \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{l(x,z)}^{r(x,z)} \frac{\partial (u \cdot c)}{\partial x} dy = \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{u} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{dx}} - (u \cdot c)|_r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + (u \cdot c)|_l \cdot \frac{\partial l}{\partial x}$$

$$\int_{l(x,z)}^{r(x,z)} \frac{\partial (v \cdot c)}{\partial y} dy = (v \cdot c)|_r - (v \cdot c)|_l$$

$$\int_{l(x,z)}^{r(x,z)} \frac{\partial (w \cdot c)}{\partial z} dy = \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{w} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{dz}} - (w \cdot c)|_r \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + (w \cdot c)|_l \cdot \frac{\partial l}{\partial z}$$

und der kinematischen Randbedingung

$$v|_l = u|_l \cdot \frac{\partial l}{\partial x} + w|_l \cdot \frac{\partial l}{\partial z}$$

$$v|_r = u|_r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + w|_r \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

führt nun zu:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{u} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{dx}} + \frac{\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{w} \cdot \mathrm{c}})}{\mathrm{dz}} = 0 \tag{3.1}$$

die Breite ist nun $Y_b(x,z) = \int_{l(x,y)}^{r(x,z)} \mathrm{d}z = r(x,z) - l(x,z)$:
nach Aufspaltung der Größen in breitengemittelte $\bar{c}$ und Schwankungskomponente $\tilde{c}$ ergibt sich dann die **breitengemittelte Transportgleichung in konservativer Form** :

$$\frac{d(Y_b \cdot \bar{c})}{dt} + \frac{d}{dx} \left\{ (Y_b \cdot \bar{u} \cdot \bar{c}) + \int_{l(x,z)}^{r(x,z)} (\tilde{c} \cdot \tilde{u}) \mathrm{dy} \right\} + \frac{d}{dz} \left\{ (Y_b \cdot \bar{w} \cdot \bar{c}) + \int_{l(x,z)}^{r(x,z)} (\tilde{c} \cdot \tilde{w}) \mathrm{dy} \right\} = 0 \tag{3.2}$$

# Kapitel 4

# Querschnitts-Mittelung

Die Querschnittsmittelung ergibt sich aus der Breitenmittelung der tiefengemittelten Transportgleichung 2.2. Dabei wird die Höhe der Wasserspiegeloberfläche als konstant in Breitenrichtung angesetzt. Die Breitenmittelung erfolgt nun vom rechten Ufer $r(x)$ bis zum linken Ufer $l(x)$.

$$\int_{l(x)}^{r(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} c \cdot dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (u \cdot c) dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (v \cdot c) dz \right) \right\} dy = 0$$

Auch hier heben sich wieder wie oben bereits zweimal gezeigt, die aus der Leibnitzregel entstehenden Randterme infolge der kinematischen Randbedingung auf. Vereinfachend wird noch das Doppelintegral in folgender Form angeschrieben: $\int_{l(x)}^{r(x)} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} c \cdot dz \cdot dy = \iint_A c \cdot da$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iint\limits_A c \cdot da \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \iint\limits_A (u \cdot c) da \right) = 0 \tag{4.1}$$

Auch hier wird nun wieder eine Aufspaltung in Mittlere- und Schwankungs-Größe durchgeführt:

$$\bar{c} = C(x.t) + \check{c}(x, y, z, t)$$

$$C(x.t) = \frac{\iint_A c \cdot da}{\iint_A da}$$

$$A(x, t) = \iint\limits_A da$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{Q(x, t)}{A(x, t)} + \check{u}(x, y, z, t)$$

$$Q = \iint\limits_A u \cdot da$$

Nach dem Einsetzen und mit der Erkenntnis,das wieder nur die Mittelung über die nichtlinearen Schwankungsterme ungleich null sein kann, ergibt sich die **querschnittsgemittelte Transportgleichung in konservativer Form** :

$$\frac{\partial}{\partial t}(A \cdot C) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (Q \cdot C) + \iint\limits_A \check{u} \cdot \check{c} \cdot da) \right\} = 0 \tag{4.2}$$

Auch diese Gleichung kann mit der Querschnittsgemittelten Konti-Gleichung

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

in die **querschnittsgemittelte Transportgleichung in primitiven Variablen** überführt werden ($U = Q/A$):

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \iint\limits_{A} \check{u} \cdot \check{c} \cdot da \right\} = 0 \tag{4.3}$$

Der erste Term der obigen Gleichung wird lokale Änderung genannt, der zweite ist die konvektive Änderung der Konzentration und beim letzten wird von Scher-Dispersion (shear dispersion [2],[5]) gesprochen.

# Kapitel 5

# Reynolds-Mittelung

Die Reynolds-Mittelung ist eine Kurzzeit (über den Zeitraum $\tau$) oder Ensemble-Mittelung, die zu der bekannten ([4]) Abspaltung turbulenter Schwankungsgrößen führt.
$c = \bar{c} + c'$ mit $\bar{c} = \int_{t-\tau}^{t} c \cdot dt$
Damit wird dann aus Gleichung 1.8:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} \cdot \bar{c} + \frac{1}{\tau} \int u'c'dt) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} \cdot \bar{c} + \frac{1}{\tau} \int v'c'dt) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w} \cdot \bar{c} + \frac{1}{\tau} \int w'c'dt) = 0 \tag{5.1}$$

# Kapitel 6

# Abschätzungen für die Dispersionstherme

## 6.1 Veranschaulichung

Die Abbildung 6.1 ist dem Buch von Fischer [2] entnommen und illustriert sehr anschaulich die Wirkung der Integrale über die Schwankungsterme aus Gleichung 4.3. Der Vorgang wird dort unter dem Stichwort "shear flow dispersion" behandelt.

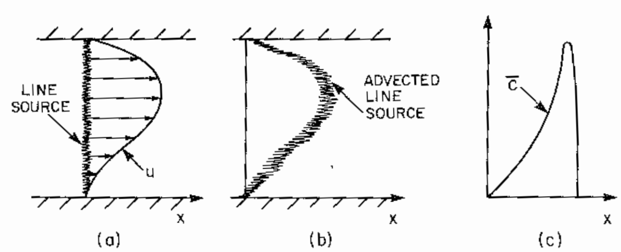


*Figure 4.4* The production of a skewed longitudinal distribution by advection of a line source. (a) The line source and the velocity profile. (b) The advected line source. (c) The longitudinal distribution of the cross-sectional mean concentration corresponding to the distribution shown in (b).

Abbildung 6.1: Aus:Mixing in Inland and Coastal Waters, Hugo B. Fischer et al. 1979 [2]

Die Abbildungen 6.2 und 6.3 sind dem Buch von Williams [5] entnommen. Er illustriert den Vorgang der Scher-Dispersion unter Verwendung einer realistischen Geschwindigkeitsverteilung (logarithmisches Geschwindigkeitsprofil). Die Konzentration löst er dabei zu Illustrationszwecken in viele kleine "Tupfen" auf.

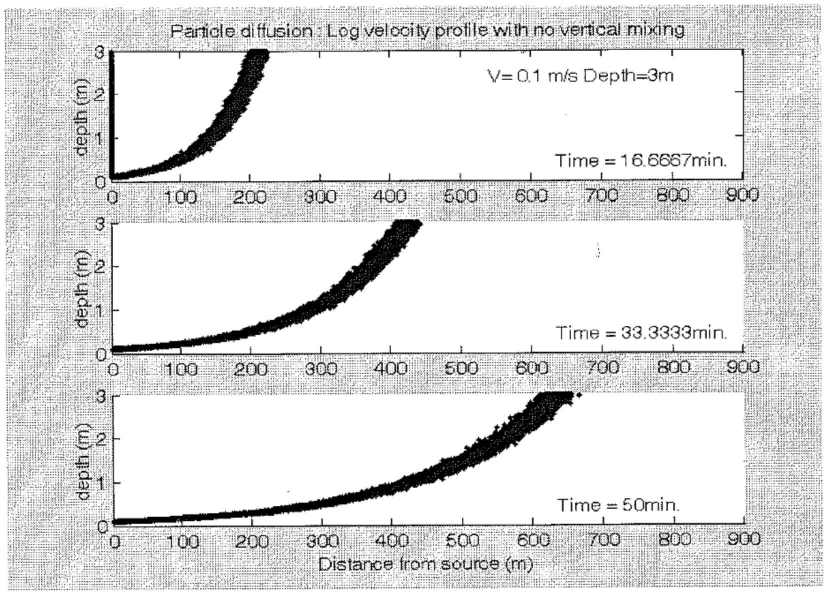


**Fig.3.19 Shear flow dispersion in a log profile velocity field, with no vertical mixing and constant longitudinal diffusivity**

Abbildung 6.2: Aus "Hydrobiological Modelling" Brian Williams, 2006 [5]

In der Abbildung 6.3 tritt zusätzlich zur Scher-Dispersion noch eine turbulente Diffusion hinzu, womit sich der diffusive Charakter der Scher-Dispersion besonders gut zeigen läßt.

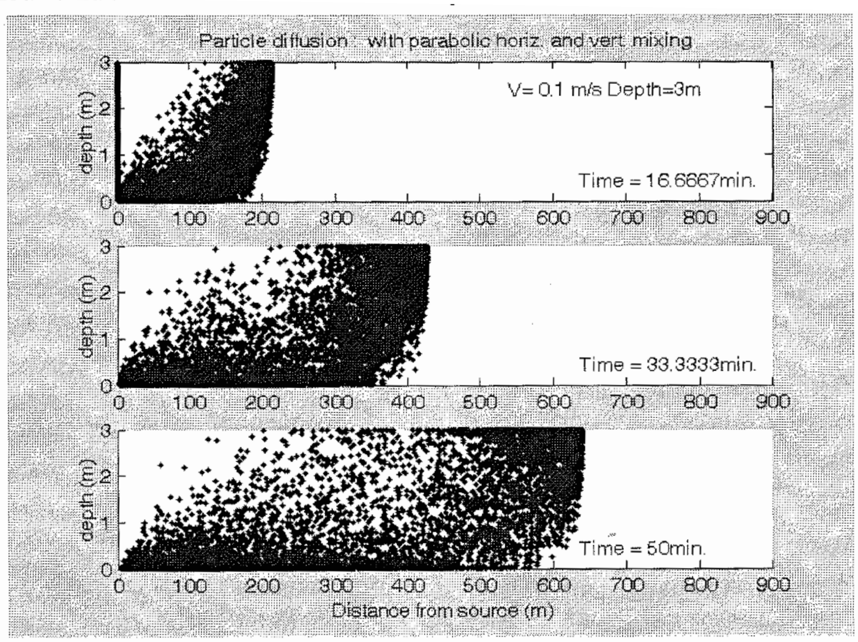


**Fig.3.20 Shear flow dispersion in log profile velocity field with horizontal and vertical diffusivities distributed parabolically**

Abbildung 6.3: Aus "Hydrobiological Modelling" Brian Williams, 2006[5]

## 6.2 Modellierung Scher-Dispersion als Diffusivität

Aufgrund der vorstehend illustrierten diffusiven Charakters der Scher-Dispersion, soll diese nun als Diffusion modelliert werden. Wir setzen daher folgendes an:

$$\frac{1}{A}\iint\limits_{A} \breve{u} \cdot \breve{c} \cdot da = \nu_{Disp} \cdot \frac{dC}{dx}$$

Durch Einsetzen in Gleichung 4.3 ergibt sich dann:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu_{Disp} \cdot \frac{dC}{dx}\right\} = 0$$

Bei dieser auch Schließung genannten Ersetzung handelt es sich um eine empirische Näherung, durch welche die Gleichung 4.3 lösbar wird unter der Voraussetzung, dass sich der Dispersionskoeffizient $\nu_{Disp}$ bestimmen läßt.

## 6.3 Größenordnung

### 6.3.1 molekulare Diffusion

Die molekulare Diffusivität ist stoffabhängig,
Für die Diffusivität von Salz in Wasser (20 Grad) findet sich in [5]:

$$0.000\,000\,000\,74\,\frac{m^2}{s} = 0.74 * 10^{-9}\frac{m^2}{s}$$

[4] gibt die kinematischeViskosität in Wasser (20 Grad) an mit:

$$0.000\,001\,\frac{m^2}{s} = 1.0 * 10^{-6}\frac{m^2}{s}$$

### 6.3.2 turbulente Diffusion

Die turbulente Diffusivität $\nu_{turb}$ (ungefähr gleich der turbulenten Viskosität) ist nach Angaben von [2]; siehe auch: [3].

$$0.067 \cdot u^* \cdot h \sim \nu_{turb} = \left(\frac{1}{\tau}\int u'c'dt\right)/\frac{d\bar{c}}{dz}$$

bei einer Schubspannungsgeschwindigkeit, $u^*$, von ca. 0.1m/s,und einer Wasertiefe von h=10m ergibt dies ungefähr

$$0.067\,\frac{m^2}{s}$$

Dies erlaubt eine Schließung von Gleichung 5.1

### 6.3.3 Scher-Dispersion (quer)

Fischer [2] gibt in Formel 5.6 für leicht geschwungene Flußläufe als empirisch ermittelten Wert an:

$$0.6 \cdot u^* \cdot h \sim \nu_{Disp} = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} (\tilde{c} \cdot \tilde{v})\mathrm{dz}/\frac{\mathrm{d(h \cdot \bar{c})}}{\mathrm{dy}} = \int_{l(x,z)}^{r(x,z)} (\tilde{c} \cdot \tilde{w})\mathrm{dy}/\frac{d(Y_b \cdot \bar{c})}{dz}$$

bei einer Schubspannungsgeschwindigkeit, $u^*$, von ca. 0.1m/s,und einer Wasertiefe von h=10m ergibt dies ungefähr

$$0.6\,\frac{m^2}{s}$$

Dies erlaubt Schließungen in den Gleichungen 2.3.

### 6.3.4 Scher-Dispersion (längs)

Eine Herleitung der Größe der Scher-Dispersion aus dem log.Geschwindigkeitsprofil gelang Elder 1959 (nach [2]):

$$5.93 \cdot u^* \cdot h \sim \nu_{Disp} = \iint_A \check{u} \cdot \check{c} \cdot da)/\frac{d(A \cdot C)}{dx}$$

bei einer Schubspannungsgeschwindigkeit, $u^*$, von ca. 0.1m/s,und einer Wasertiefe von h=10m ergibt dies ungefähr

$$5.93\frac{m^2}{s}$$

Dies erlaubt eine Schließung von Gleichung 4.3.

### 6.3.5 Fazit

Die Vernachlässigung der molekularen Diffusion ist in frei fließenden Gewässern angemessen.

Turbulente Vermischung spielt in querschnittsgemittelten Transport-Simulationen von Flüssen keine und in breiten- und tiefengemittelten Modellen allenfalls eine untergeordnete Rolle. Die Scher-Dispersion dominiert.

# Literaturverzeichnis


[1] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik / I.N. Bronstein ...[et. al.].* Teubner Leipzig, Nauka Moskau, Leipzig, 21. auflage , g.grosche edition, 1983.

[2] Hugo B. Fischer, editor. *Mixing in inland and coastal waters.* Academic Press, New York, 1979.

[3] Hiroji Nezu, Iehisa; Nakagawa. *Turbulence in Open-Channel Flows.* IAHR Monograph, 1993.

[4] Heinz Schade. *Strömungslehre.* De Gruyter Studium. De Gruyter, Berlin ; Boston, 4., neu bearbeitete auflage edition, 2013.

[5] Brian J Williams. *Hydrobiological modelling: processes, numerical methods and applications.* Brian Williams, School of Engineering, University of Newcastle, [Newcastle], N.S.W., 2006.